

數學教育「卓師工作室」 2018/2019

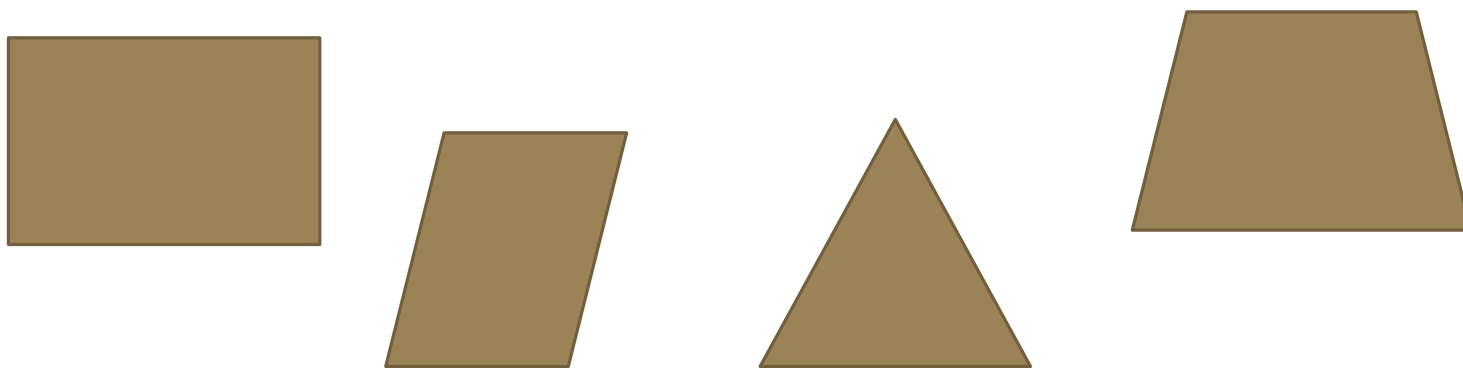
成果分享會

解難策略「窮盡法」

五年級~面積

陳曉昕老師(副組長)、李麗娟老師、葉肇映老師

窮盡法（五年級~面積）



學生已有知識：

能在已知面積的情況下，求長和闊或底和高。

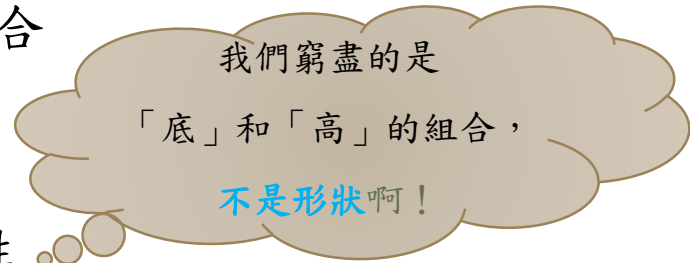
窮盡法（五年級~面積）

學習目標：

1. 學習以窮盡法的策略，窮盡不同平面圖形的計算組合
2. 懂得根據平面圖形的特性篩選正確的計算組合

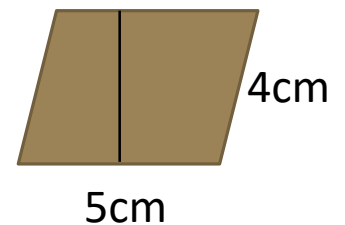
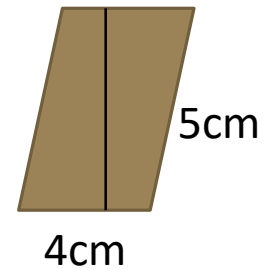
教學設計：

窮盡法的技巧：有規律地列寫所有組合的可能性

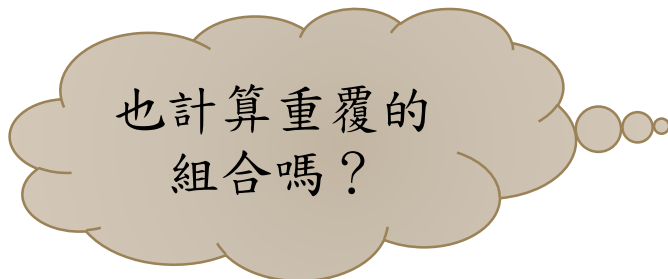


- 有一個面積是 20cm^2 的平行四邊形有多少個不同組合的底和高？（答案必需是整數）

底	×	高
1	×	20
2	×	10
4	×	5
5	×	4
10	×	2
20	×	1



- 一組的底和高稱為一個組合



窮盡法（五年級~面積）

課題：「梯形面積」
運用「窮盡法」設計課堂

$$\frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}$$



$$\frac{(\text{上底}) + (\text{下底}) \times \text{高}}{2}$$



$$\frac{(\text{上底}) + (\text{下底}) \times \text{高}}{2}$$

也計算重覆
的組合嗎？

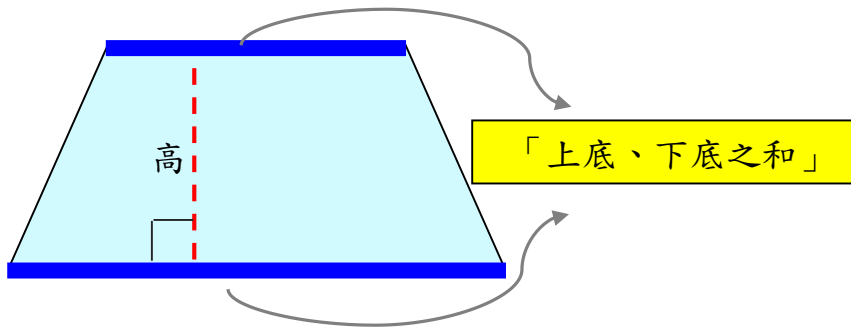
符合「梯形」
的特性嗎？

窮盡法小組教研會議

不斷優化課堂教學設計



(1) 面積是 12 cm^2 的梯形共有多少個不同組合的「上底、下底之和」及「高」?(答案必需是整數)



(上、下底之和) \times 高
是多少? 24

提示:窮盡時,把「上、下底之和」同一項,不需分開

難點1: 也計算重複的組合? 如何篩選?

難點2: 是否所有組合都符合「梯形」的特性?

(上+下底)	X	高	÷2	面積
1	X	24	÷2	12
2	X	12	÷2	12
3	X	8	÷2	12
4	X	6	÷2	12
6	X	4	÷2	12
8	X	3	÷2	12
12	X	2	÷2	12
24	X	1	÷2	12

積 = 「24」

如何篩選?

課堂片段(1)

學生匯報解難方法

難點1: 也計算重複的組合? 如何篩選?

難點2: 是否所有組合都符合「梯形」的特性?

也計算重複
的組合嗎?

符合「梯形」
的特性嗎?

(上+下底)	X	高	÷2	面積
1	X	24	÷2	12
2	X	12	÷2	12
3	X	8	÷2	12
4	X	6	÷2	12
6	X	4	÷2	12
8	X	3	÷2	12
12	X	2	÷2	12
24	X	1	÷2	12

GeoGebra

檢定重覆 / 可行性

答案: 6 個

窮盡法 (五年級~面積)

學生表現

5) 面積是 12 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 24
 這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 6 個

思考區：

高	上 + 下
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2
24	1

= 6個

有規律地由小至大
列寫所有組合的可能性!

5) 面積是 12 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 24
 這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 6 個

思考區：

上底+下底	\times 高	備註
1	24	\rightarrow 必須是整數
2	12	\rightarrow 結果相同, 就不是梯形了
3	8	
4	6	
6	4	
8	3	
12	2	
24	1	剩下6個

懂得從組合中篩選!

窮盡法 (五年級~面積)

學生表現

5) 面積是 12 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 24

這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 6 個 ✓

思考區：梯形面積 = (上底 + 下底) \times 高 $\div 2$

① 3×8 = 24	④ 8×3 = 24	之和 3×8 4×6 6×4 8×3 12×2 24×1
② 4×6 = 24	⑤ 12×2 = 24	
③ 6×4 = 24	⑥ 24×1 = 24	

學生運用不同方法窮盡

5) 面積是 12 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 24

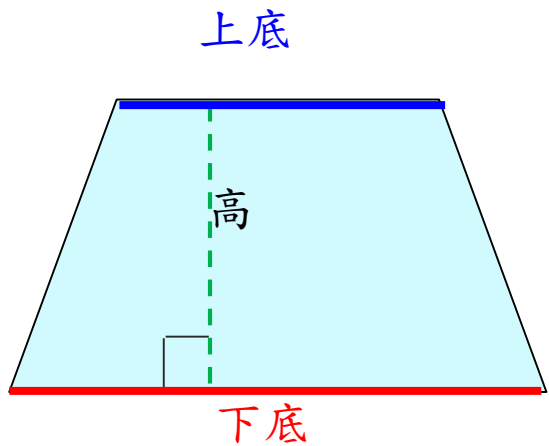
這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 6 個 ✓

思考區：

(上底 + 下底)	\times	高	
沒可能解	\times	24	
組合 2	\times	12	
3	\times	8	= 24 $\div 2$
4	\times	6	
6	\times	4	
8	\times	3	
12	\times	2	
24	\times	1	

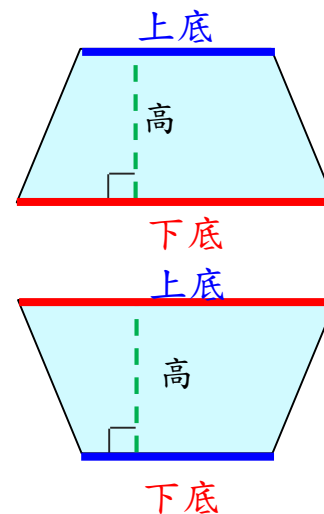
(2) 面積是 12 cm^2 、高是 2 cm 的梯形，有多少個不同組合的「上底」和「下底」？(答案必需是整數)

(上+下)		高	÷2	=	面積
12	X	2	÷2	=	12
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">積 = 24</div>					



(2) 面積是 12 cm^2 、高是 2 cm 的梯形，有多少個不同組合的「上底」和「下底」？(答案必需是整數)

上底	下底	(上+下)		高	$\div 2$		面積
1cm	11cm	12	X	2	$\div 2$	=	12
2 cm	10 cm						
3 cm	9 cm						
4 cm	8 cm						
5 cm	7 cm						
6 cm	6 cm						
7 cm	5 cm						
8 cm	4 cm						
9 cm	3 cm						
10 cm	2 cm						
11cm	1cm						



上、下底對調，高度不變，也是屬於同一個梯形嗎？
需要刪除重覆的組合嗎？

課堂片段(2)

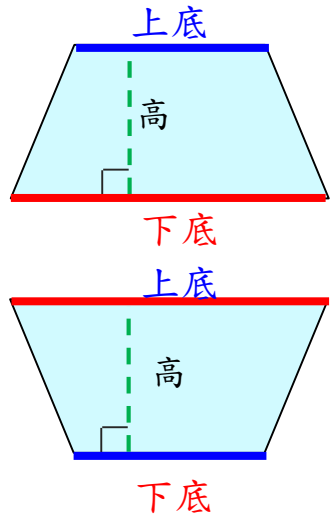
學生匯報討論結果

(2) 面積是 12 cm^2 、高是 2 cm 的梯形，有多少個不同組合的「上底」和「下底」？(答案必需是整數)

上底	下底	(上+下)		高	$\div 2$		面積
1cm	11cm	12	X	2	$\div 2$	=	12
2 cm	10 cm						
3 cm	9 cm						
4 cm	8 cm						
5 cm	7 cm						
6 cm	6 cm						
7 cm	5 cm						
8 cm	4 cm						
9 cm	3 cm						
10 cm	2 cm						
11cm	1cm						

也計算重覆的組合嗎？

符合「梯形」的特性嗎？



窮盡法 (五年級~面積)

學生表現

6) 面積是 $\boxed{12}$ cm^2 、高是 $\boxed{2}$ cm 的梯形，它的上下底之和是多少？

12

另外，它有多少個不同組合的上底和下底？ 5 個

思考區：

(上底+下底)	
1	+11
2	+10
3	+9
4	+8
5	+7
沒可能的6+6組合	

$\times \text{高}(2\text{cm}) \div 2 = 12$

6) 面積是 $\boxed{12}$ cm^2 、高是 $\boxed{2}$ cm 的梯形，它的上下底之和是多少？

12

另外，它有多少個不同組合的上底和下底？ 5 個

思考區：
 $\frac{\text{上}}{1+11}$

2+10

3+9

4+8

5+7

~~6+6~~

= 5個

(3)面積是 6 cm^2 的梯形，有多少個不同組合的「上底」、「下底」和「高」？（答案必需是整數）

高階思維

上下底之和	高
1	12
2	6
3	4
4	3
4	3
6	2
6	2
6	2
12	1
12	1
12	1
12	1
12	1
12	1
12	1
12	1
12	1
12	1
12	1

積=12

課堂片段 (3)

教師適時提示，引導學生解難

(3) 面積是 6 cm^2 的梯形，有多少個不同組合的「上底」、「下底」和「高」？（答案必需是整數）

高階思維

上底	下底	上下底之和	高
		1	12
		2	6
1	2	3	4
1	3	4	3
2	2	4	3
1	5	6	2
2	4	6	2
3	3	6	2
1	11	12	1
2	10	12	1
3	9	12	1
4	8	12	1
5	7	12	1
6	6	12	1
7	5	12	1
8	4	12	1
9	3	12	1
10	2	12	1
11	1	12	1

符合「梯形」的特性嗎？

積=12

也計算重覆的組合嗎？

(3) 面積是 6 cm^2 的梯形，有多少個不同組合的「上底」、「下底」和「高」？（答案必需是整數）

高階思維

上底	下底	上下底之和	高
		1	12
		2	6
1	2	3	4
1	3	4	3
2	2	4	3
1	5	6	2
2	4	6	2
3	3	6	2
1	11	12	1
2	10	12	1
3	9	12	1
4	8	12	1
5	7	12	1
6	6	12	1
7	5	12	1
8	4	12	1
9	3	12	1
10	2	12	1
11	1	12	1

符合「梯形」的特性嗎？

積=12

也計算重覆的組合嗎？

答案：9 個

窮盡法 (五年級~面積)

學生表現

挑戰題：面積是 6 cm^2 的梯形，有多少個不同組合的上底、下底和高？ 9

思考區：

9種

固定「高」

挑戰題：面積是 6 cm^2 的梯形，有多少個不同組合的上底、下底和高？ 9 個

思考區：

上+下 \times 1	上+下 \times 2	上+下 \times 3	上+下 \times 4	上+下 \times 6
$(1+1)\times 1$	$(1+5)\times 2$	$(1+3)\times 3$	$(1+2)\times 4$	$(1+1)\times 6$
$(2+10)\times 1$	$(2+4)\times 2$	$(2+2)\times 3$	$(2+1)\times 4$	
$(3+9)\times 1$	$(3+3)\times 2$	$(3+1)\times 3$		
$(4+8)\times 1$	$(4+2)\times 2$			
$(5+7)\times 1$	$(5+1)\times 2$			

有可能的數：

$(1+1)\times 1$	$(1+5)\times 2$	$(1+3)\times 3$	$(1+2)\times 4$
$(2+10)\times 1$	$(2+4)\times 2$		
$(3+9)\times 1$			
$(4+8)\times 1$			
$(5+7)\times 1$			

= 9個

挑戰題：面積是 6 cm^2 的梯形，有多少個不同組合的上底、下底和高？ 9 個

思考區：

組合：1, 2, 3, 4

$12 \div 2 = 6$

- $(1+5)\times 2$
- $(2+4)\times 2$
- $(1+2)\times 4$
- $(1+3)\times 3$
- $(1+1)\times 6$
- $(2+10)\times 1$
- $(3+9)\times 1$
- $(4+8)\times 1$
- $(5+7)\times 1$

窮盡法（五年級~面積）

分析前測、後測結果

P. 5 「窮盡法」 前後測		答對率 (%)					
		A 校		B校			
		5B		5B		5D	
		前	後	前	後	前	後
Q5a	面積是 8 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少？	92%	97%	7%	94%	22.22%	85%
Q5b	這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高？	17%	19%	12%	43%	6.06%	32%
Q6a	面積是 8 cm^2 、高是 2 cm 的梯形，它的上下底之和是多少？	89%	89%	26%	70%	29.41%	76%
Q6b	另外，它有多少個不同組合的上底和下底？	22%	67%	18%	40%	8.82%	38%

比較「前測和後測」學生的表現

5) 面積是 8 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 16

這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 11 個

思考區:

$(1+15) \times 1$ $(2+14) \times 1$ $(3+13) \times 1$ $(4+12) \times 1$ $(5+11) \times 1$
 $(6+10) \times 1$ $(7+9) \times 1$
 $(3+5) \times 2$ $(6+2) \times 2$ $(7+1) \times 2$
 $(1+3) \times 4$

=16

前測

學生把「上底」、「下底」分開了

清楚分開

「上底與下底之和」、
「高」

5) 面積是 8 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 16

這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 3 個

思考區:

1×16

2×8

4×4

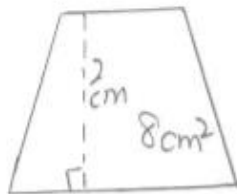
後測

比較「前測和後測」學生的表現

6) 面積是 8 cm^2 、高是 2 cm 的梯形，它的上下底之和是多少？ 8

另外，它有多少個不同組合的上底和下底？ 2 個

思考區：



$$\begin{array}{r} 8 \\ 2 \sqrt{16} \\ 16 \end{array}$$

$$8 = 1 \times 8 \\ = 2 \times 4$$

前測

將「上底」
與「下底」
以**乘法**組合
找出



6) 面積是 8 cm^2 、高是 2 cm 的梯形，它的上下底之和是多少？ 8

另外，它有多少個不同組合的上底和下底？ 3 個

思考區：



$$\begin{array}{r} 17 \\ 26 \\ 35 \end{array}$$



$$8 \times 2 = 16 \div 2$$

後測

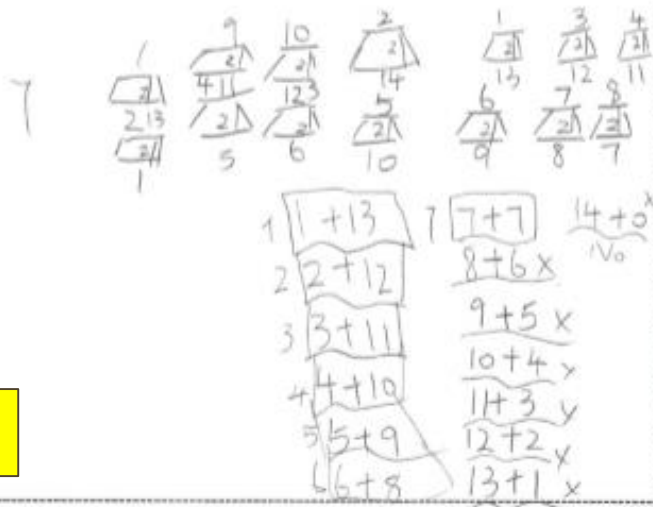
將「上底」
與「下底」
以**加法**組合
找出

比較「前測和後測」學生的表現

6) 面積是 8 cm^2 、高是 2 cm 的梯形，它的上下底之和是多少？ 8

另外，它有多少個不同組合的上底和下底？ 2 個

思考區：



前測

*理解到「上底與下底之和」是 8 cm

*篩走了上底和下底相同的組合

*錯誤將「上底與下底之和」當成 14 cm

*沒有篩走上底和下底相同的組合

面積是 8 cm^2 、高是 2 cm 的梯形，它的上下底之和是多少？ 8

另外，它有多少個不同組合的上底和下底？ 3 個

思考區：

$$\begin{aligned} &(1+7) \times 2 \\ &(2+6) \times 2 \\ &(3+5) \times 2 \end{aligned}$$

後測

分析「後測」學生的表現

4) 面積是 8 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 16

這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 3 個

思考區：

$$\begin{aligned} (1+7) \times 2 \div 2 \\ (2+6) \times 2 \div 2 \\ (3+5) \times 2 \div 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \times 16 \div 2 \\ 2 \times 8 \div 2 \\ 4 \times 4 \div 2 \end{aligned}$$

4) 面積是 8 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 16

這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 3 個

思考區：

上底	高
4	4
8	2
16	1

4) 面積是 8 cm^2 的梯形，(上底與下底之和) \times 高 是多少? 16

這個梯形有多少個不同組合的上底與下底之和以及高? 3 個

思考區：

上底	下底	高
1	7	2
2	6	2
3	5	2
5	3	2
6	2	2
7	1	2

$= 16 \text{ cm}^2$

有 3 組

欣賞學生不同形式的表達

窮盡法（五年級~面積）

反思

1. 照顧個別差異

- 由於題目較艱深，學生需要運用解難策略，因此教師教導學生邏輯地列舉可能性，篩選合理的答案。
- 3所學校的背景不同，學生的能力亦不一，所以教師需要按學生的能力調適教材和教學策略，如加上實物圖、iPad(GeoGebra)輔助等。
(期望學生學會運用解難策略，有信心解決較複雜和艱深的題目)

2. 提升數學思維能力

從分析前測和後測結果所見，學生盡力嘗試，無論在列表、列算式、繪圖等方面，學生均見進步，數學思維能力亦見提升。

謝謝！